Equations de Maxwell modifiées avec monopôles magnétiques

Jacques Bailhache (jacques.bailhache@gmail.com)

June 26, 2024

1 Remarque préliminaire

Pour simplifier les formules, nous utiliserons un système d'unités dans lequel $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

2 Rappels de calcul vectoriel

- div rot = 0
- rot grad = 0
- $div\ grad = \Delta$
- $rot\ rot = grad\ div - \Delta$

3 Force exercée sur un corps chargé dans un champ électromagnétique

Cette force vaut :

$$f = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où :

- f est la force exercée sur le corps
- q est la charge électrique du corpt
- $\vec{E}$ est le champ électrique au point où se trouve le corps
- $\vec{v}$ est la vitesse du corps
- $\vec{B}$ est le champ magnétique au point où se trouve le corps.

Avec des monopôles magnétique, le rôle des champs électriques et magnétiques serait inversés. La force totale devrait donc être de la forme :

$$f = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + q_M(\vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{E})$$

où q_M représente la charge magnétique du corps.

4 Equations de Maxwell

Commençons par rappeler les équations de Maxwell :

- $div\ \vec{E} = \rho$
- $div\ \vec{B} = 0$
- $rot\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

- $rot\ \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

où ρ représente la densité de charge et j la densité de courant.
On constate une dissymétrie dans ces équations. Pour prendre en compte les monopôles magnétiques, il suffit de les rendre symétriques :

- $div\ \vec{E} = \rho$
- $div\ \vec{B} = \rho_M$
- $rot\ \vec{E} = -\vec{j}_M - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $rot\ \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

où ρ_M représente la densité de charge magnétique et j_M la densité de courant magnétique.

5 Invariance de jauge et potentiels

On introduit un potentiel scalaire V et un potentiel vecteur $\vec{A}$.
Ces potentiels vérifient la jauge de Lorentz : $\frac{\partial V}{\partial t} + div\ \vec{A} = 0$.
Ils sont liés aux source par les formules :

- $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \Delta V = \rho$
- $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta A = j$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont obtenus à partir des potentiels par les formules suivantes :

- $\vec{E} = -grad\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
- $\vec{B} = rot\ \vec{A}$

On vérifie les formules initiales :

- $div\ \vec{E} = -div\ grad\ V - \frac{\partial}{\partial t} div\ \vec{A} = -\Delta V + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \rho$
- $rot\ \vec{E} = -rot\ grad\ V - \frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{A} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $div\ \vec{B} = div\ rot\ \vec{A} = 0$
- $rot\ \vec{B} = rot\ rot\ \vec{A} = grad\ div\ \vec{A} - \Delta \vec{A} = -grad\ \frac{\partial V}{\partial t} - \Delta A = -\frac{\partial}{\partial t} grad\ V - \Delta \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t}(-\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) - \Delta A = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \Delta A = j + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Pour prendre en compte les monopôles magnétiques, on introduit un potentiel magnétique scalaire V_M et un potentiel magnétique vecteur $\vec{A}_M$.
Ces potentiels vérifient également la jauge de Lorentz : $\frac{\partial V_M}{\partial t} + div\ \vec{A}_M = 0$.
Ils sont liés aux source magnétiques par les formules :

- $\frac{\partial^2 V_M}{\partial t^2} - \Delta V_M = \rho$
- $\frac{\partial^2 \vec{A}_M}{\partial t^2} - \Delta A_M = j$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont alors obtenus à partir des potentiels par les formules suivantes :

- $\vec{E} = -grad\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - rot\ \vec{A}_M$
- $\vec{B} = -grad\ V_M - \frac{\partial \vec{A}_M}{\partial t} + rot\ \vec{A}$

On vérifie les formules initiales :

- $div\ \vec{E} = -div\ grad\ V - \frac{\partial}{\partial t} div\ \vec{A} - div\ rot\ \vec{A}_M = -div\ grad\ V - \frac{\partial}{\partial t} div\ \vec{A} = -\Delta V + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \rho$
- $rot\ \vec{E} = rot(-grad\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - rot\ \vec{A}_M) = -rot\ grad\ V - \frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{A} - rot\ rot\ \vec{A}_M = -\frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{A} - rot\ rot\ \vec{A}_M = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B} + grad\ V_M + \frac{\partial \vec{A}_M}{\partial t}) - rot\ rot\ \vec{A}_M = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} grad\ V_M - \frac{\partial^2 \vec{A}_M}{\partial t^2} - rot\ rot\ \vec{A}_M = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} grad\ V_M - \frac{\partial^2 \vec{A}_M}{\partial t^2} - grad\ div\ \vec{A}_M + \Delta \vec{A}_M = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - j_M - \frac{\partial}{\partial t} grad\ V_M - grad\ div\ \vec{A}_M = -j_M - \frac{\partial E}{\partial t}$
- $div \vec{B} = -div\ grad\ V_M - \frac{\partial}{\partial t} div\ \vec{A}_M + div\ rot\ \vec{A} = -\Delta V_M + \frac{\partial^2 V_M}{\partial t^2} = \rho_M$
- $rot \vec{B} = rot(-grad\ V_M - \frac{\partial \vec{A}_M}{\partial t} + rot\ \vec{A}) = -rot\ grad\ V_M - \frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{A}_M + rot\ rot\ \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} rot\ \vec{A}_M + rot\ rot\ \vec{A} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} + grad\ V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) + rot\ rot\ \vec{A} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} grad\ V + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + rot\ rot\ A = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} grad\ V + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + grad\ div\ \vec{A} - \Delta \vec{A} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + j + \frac{\partial}{\partial t} grad\ V + grad\ div\ \vec{A} = j + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

6 Formulation covariante

Nous utiliserons une métrique de signature (+ - - -). Si l'espace est euclidien, le tenseur métrique vaut donc :

$$g^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La force exercée sur un corps est :

$$f^\alpha = q F^\alpha_\beta v^\beta$$

où F^α_β désigne le tenseur électromagnétique :

$$F^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Avec des monopôles magnétiques, la force devient :

$$f^\alpha = q F^\alpha_\beta v^\beta + q_M \widetilde{F}^\alpha_\beta v^\beta$$

où $\widetilde{F}$ désigne le tenseur électromagnétique dual :

$$\widetilde{F}^\alpha_\beta = -\frac{1}{2} g^{\alpha\zeta} g^{\delta\eta} \varepsilon_{\zeta\beta\gamma\eta} F^\gamma_\delta = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ B_x & 0 & -E_z & E_y \\ B_y & E_z & 0 & -E_x \\ B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

où ε représente le symbole de Levi-Civita
ce qui correspond à F^α_β avec E et B échangés et le signe de E modifié, ce qui est cohérent avec la formule

$$f = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + q_M(\vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{E})$$

.
Les équations de Maxwell en formulation covariante :

- $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta$
- $\partial_\alpha \widetilde{F}^{\alpha\beta} = 0$

avec

$$j^\beta = \begin{pmatrix} V \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

deviennent avec les monopoles magnétiques :

- $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = j^\beta$
- $\partial_\alpha \widetilde{F}^{\alpha\beta} = j_M^\beta$

Sans monopôles magnétiques, le champ électromagnétique s'exprime en fonction du potentiel par :

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

Avec des monopôles magnétiques, la formule devient :

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha - \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu A_{M\nu}$$

On a également :

$$\widetilde{F}^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A_M^\beta - \partial^\beta A_M^\alpha + \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu A_\nu$$