La connexion A_μ est le gradient de la phase ϕ : si on part d'un point x^μ avec une phase ϕ et qu'on se déplace vers $x^\mu + dx^\mu$ on a une phase $\phi + d\phi = \phi + A_\mu dx^\mu$. Dans le cas général d'un champ de jauge non alélien (Yang-Mills) on a une phase ϕ^α qui devient $\phi^\alpha + A^\alpha{}_\mu dx^\mu$, où α parcourt les dimensions du groupe associé au champ de jauge. Dans le cas de l'électromagnétisme, ce groupe est U(1) et n'a qu'une dimension, donc on peut simplifier en supprimant l'indice α.

On a une analogie entre le potentiel A_μ et la connection :
Si on part d'un point x^μ avec un vecteur v^ν et qu'on transporte parallèlement ce vecteur vers $x^\mu + dx^\mu$, on a le vecteur $x^\mu - \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} v^\rho dx^\sigma$.
On remarque toutefois une différence : dans le cas du champ de jauge, on ajoute une phase $A^\alpha{}_\mu dx^\mu$ alors que dans la connection affine on multiplie v^ρ par la matrice $\delta^\mu{}_\rho + \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} dx^\sigma$. Je pressens là une analogie avec la différence entre algèbre et groupe de Lie.

Le champ est défini par la variation de phase dans une boucle infinitésimale.
Supposons qu'on effectue une boucle P + dx + dy - dx - dy, en supposant pour simplifier que dx et dy sont dans les directions des vecteurs de base du système de coordonnées.

```
          Aμ + ∂y Aμ dy
   P+dy <------------------ P+dx+dy
    |            -dx
    |                         |
Aμ  | -dy                     |
    |                   +dy | Aμ + ∂x Aμ dx
    |                         |
    V            +dx          |
    P ---------------------> P+dx
   ϕ          Aμ
```

On arrive en P + dx avec une phase $\phi + A_x dx$. En P + dx, le potentiel est $A_\mu + \partial_x A_\mu dx$. On arrive donc en P + dx + dy avec une phase $\phi + A_x dx + (A_y + \partial_x A_y dx) dy$
puis de même en P + dx + dy - dx avec une phase $\phi + A_x dx + (A_y + \partial_x A_y dx) dy - (A_x + \partial_y A_x dy) dx$
et on revient en P avec une phase :
$\phi + A_x dx + (A_y + \partial_x A_y dx) dy - (A_x + \partial_y A_x dy) dx - A_y dy$
qu'on peut simplifier en $\phi + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx\, dy = \phi + F_{xy} dx\, dy$.
Dans ce calcul, pour simplifier j'ai supposé que le long d'un trajet le potentiel est celui correspondant à l'extrémité des plus petits x et y, mais j'ai vérifié qu'en prenant le potentiel du milieu du trajet les termes supplémentaires (de la forme $1/2\ \partial_x A_x dx^2$) s'annulent et on trouve le même résultat.

Supposons maintenant qu'on va de P à P + dx + dy en passant par P + dx puis en passant par P + dy et on calcule la différence de phase.
On part de P avec une phase ϕ, on passe en P + dx avec une phase $\phi + A_x dx$ puis en P + dx + dy avec une phase $\phi + A_x dx + (A_y + \partial_x A_y dx) dy = \phi + A_x dx + A_y dy + \partial_x A_y dx\, dy$.
On part de P avec une phase ϕ, on passe en P + dy avec une phase $\phi + A_y dy$ puis en x + dy + dx avec une phase $\phi + A_y dy + (A_x + \partial_y A_x dy) dx = \phi + A_y dy + A_x dx + \partial_y A_x dx\, dy$.
La différence est :
$\phi + A_y dy + A_x dx + \partial_y A_x dx\, dy - \phi + A_x dx + A_y dy + \partial_x A_y dx\, dy$
$= (\partial_y A_x - \partial_x A_y) dx\, dy = -F_{xy} dx\, dy$.
On trouve l'opposé de la première boucle car ici on tourne dans l'autre sens (-dy-dx+dy+dx).

Il y a une analogie entre le champ et la courbure qui correspond à la transformation d'un vecteur transporté le long d'une boucle infinitésimale. Si on part de P avec un vecteur v^μ et on le transporte parrallèlement vers P + dx, on obtient :
$(\delta^\mu{}_\nu - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} dx^\rho) v^\nu = v^\mu - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dx^\rho$
En P + dx, on a une connexion $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} dx^\sigma$
En transportant le vecteur obtenu en P + dx (soit $v^\mu - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dx^\rho$) parallèlement vers P + dx + dy, on le multiplie par
$\delta^\mu{}_\nu - (\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} dx^\sigma) dy^\rho$
et on obtient donc :
$(\delta^\mu{}_\nu - (\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} dx^\sigma) dy^\rho) (v^\nu - \Gamma^\nu{}_{\tau\xi} v^\tau dx^\xi)$
$= v^\mu - \Gamma^\mu{}_{\tau\xi} v^\tau dx^\xi - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dy^\rho - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dy^\rho dx^\sigma + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \Gamma^\nu{}_{\tau\xi} v^\tau dx^\xi dy^\rho + \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \Gamma_{\nu\tau\xi} v^\tau dx^\xi dy^\rho dx^\sigma$
On peut ignorer le dernier terme en $dx^2\, dy$ négligeable devant les termes en dx dy.
Il reste donc :
$v^\mu - \Gamma^\mu{}_{\tau\xi} v^\tau dx^\xi - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dy^\rho - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dy^\rho dx^\sigma + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \Gamma^\nu{}_{\tau\xi} v^\tau dx^\xi dy^\rho$
Symétriquement, avec le trajet P + dy + dx, on obtient :
$v^\mu - \Gamma^\mu{}_{\tau\xi} v^\tau dy^\xi - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dx^\rho - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dx^\rho dy^\sigma + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \Gamma^\nu{}_{\tau\xi} v^\tau dy^\xi dx^\rho$
En faisant la différence, les termes V^μ, $\Gamma^\mu{}_{\tau\xi} v^\tau dx^\xi$ et $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dy^\rho$ s'annulent. Il reste :

$\partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dx^\sigma dy^\rho - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} v^\nu dx^\rho dy^\sigma + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} v^\nu dx^\rho dy^\sigma - \Gamma^\mu{}_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} v^\nu dx^\rho dy^\sigma$
$= R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} v^\nu dx^\rho dy^\sigma$
Un autre calcul similaire (moins clair à mon avis) se trouve dans http://vishnu.mth.uct.ac.za/omei/gr/chap6/node9.html
Une boucle -dy-dx+dy+dy multiplie donc v^ν par la matrice $\delta^\mu{}_\nu + R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} dx^\rho dy^\sigma$
Une boucle en sens inverse +dx+dy-dx-dy multiplie v^ν par $\delta^\mu{}_\nu - R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} dx^\rho dy^\sigma$ et ajoute F_{xy} dx dy à la phase.
On a donc une correspondance entre le potentiel et la connexion d'une part, et entre le champ et la courbure d'autre part.

La théorie de Kaluza Klein met en évidence une autre correspondance entre le potentiel et la métrique d'une part, et entre le champ et la connexion d'autre part.
Il s'agit d'une théorie dans laquelle la seule force est la gravitation dans un espace produit de l'espace-temps par le groupe associé au champ de jauge : U(1) pour l'électromagnétisme, SU(2) pour l'interaction faible, SU(3) pour l'interation forte, SU(5) pour la théorie unifiée.
Le potentiel est introduit dans les "vielbeins" qui sont les généralisations des tétrades ou vierbeins dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. (voir [Tetrad Formalism])
On définit la matrice de changement de base $e^a{}_\mu$ entre un système de coordonnées localement plat et un système de coordonnées curviligne. Le tenseur métrique en coordonnées curviligne est :
$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$
où η_{ab} est le tenseur métrique de l'espace-temps plat : 1 -1 -1 -1 dans la diagonale, 0 ailleurs.
On introduit le potentiel dans la matrice $e^a{}_\mu$ de la façon suivante :

$$e^a{}_\mu = \begin{pmatrix} e'^{a'}{}_{\mu'} & 0 \\ e''^{a''}{}_{\nu''} A^{\nu''}{}_{\mu'} & e''^{a''}{}_{\mu''} \end{pmatrix}$$

où les ' désignent l'espace-temps et les " les dimensions compactifiées associées au groupe du champ de jauge.

Pour simplifier les calculs, on peut attribuer des indices différents aux dimensions étendues et compactifiées, par exemple: t=0, x=1, y=2, z=3 et 4 à d-1 pour les dimensions compactifiées, et considérer que les indices de tous les tenseurs varient de 0 à d-1, en complétant avec des 0, par exemple :

$$A^\alpha{}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^\alpha{}_\mu & 0 \end{pmatrix}$$

Avec cette convention, on a :
$e^a{}_\mu = e'^a{}_\mu + e''^a{}_n A^n{}_\mu + e''^a{}_\mu$
$= e'^{a'}{}_\mu + e''^a{}_n (A^n{}_\mu + \delta^n{}_\mu)$
$= e'^a{}_\mu + e''^a{}_\mu + e''^a{}_m A^m{}_\mu$

Le tenseur métrique en coordonnées curviligne est alors :
$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu$
$= \eta_{ab} (e'^a{}_\mu + e''^a{}_\mu + e''^a{}_m A^m{}_\mu) (e'^b{}_\nu + e''^b{}_\nu + e''^b{}_n A^n{}_\nu)$
$= \eta_{ab} e'^a{}_\mu e'^b{}_\nu + \eta_{ab} e'^a{}_\mu e''^b{}_\nu + \eta_{ab} e'^a{}_\mu e''^b{}_n A^n{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_\mu e'^b{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_\mu e''^b{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_\mu e''^b{}_n A^n{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_m A^m{}_\mu e'^b{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_m A^m{}_\mu e''^b{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_m A^m{}_\mu e''^b{}_n A^n{}_\nu$
Etant donné que $\eta_{ab} e'^a{}_\mu e''^b{}_\nu = 0$ (car η_{ab} est non nul pour a = b, $e'^a{}_\mu$ est non nul pour a entre 0 et 3 et $e''^b{}_\nu$ est non nul pour b entre 4 et d-1) et de même pour $\eta_{ab} e''^a{}_\mu e'^b{}_\nu$, on a: $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e'^a{}_\mu e'^b{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_\mu e''^b{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_\mu e''^b{}_n A^n{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_m A^m{}_\mu e''^b{}_\nu + \eta_{ab} e''^a{}_m A^m{}_\mu e''^b{}_n A^n{}_\nu$
$= g'_{\mu\nu} + g''_{\mu\nu} + g''_{\mu n} A^n{}_\nu + g''_{m\nu} A^m{}_\nu + g''_{mn} A^m{}_\mu A^n{}_\nu$
Voir aussi [Reduction of the Low Energy String Effective Action]
On voit ici que le potentiel A apparait dans les composantes 4 à d-1 du tenseur métrique.

La connexion est définie en fonction de la métrique par :
$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = 1/2 (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) g^{\lambda\rho}$
Je ne développerai pas le calcul détaillé ici mais il fait apparaitre le champ $F^\rho{}_{\mu\nu}$ dans $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ et $\Gamma^\mu{}_{\rho\nu}$ pour ρ entre 4 et d-1, et en considérant la charge comme les composantes de l'impulsion dans les dimensions compactifiées, l'équation des géodésiques $d^2x^\lambda/dt^2 = -\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} dx^\mu/dt\, dx^\nu/dt$ permet de retrouver la force : par exemple dans le cas de l'électromagnétisme : $f^\lambda = m\, d^2x^\lambda/dt^2 = q\, dx^\mu/dt\, F^\lambda{}_\mu$.