La connexion affine

Jacques Bailhache (jacques.bailhache@gmail.com)

May 24, 2022

1 Introduction

Considérons un espace muni d'un système de coordonnées quelconques. On parle parfois de système de coordonnées curvilignes, mais je préfère utiliser le terme "quelconques" car les considérations dont il sera question restent valable pour des coordonnées "rectilignes". Un tel système de coordonnées peut être défini comme une correspondance entre un point de l'espace et un n-uplet de nombres, appelé "coordonnées" de ce point.

2 Transport parallèle

On définit la notion de transport parallèle d'un vecteur contravariant d'un point de l'espace à un autre, qui consiste intuitivement à déplacer ce vecteur sans l'allonger ni le raccourcir ni le faire tourner. Dans le cas de coordonnées cartésiennes, les coordonnées du vecteur au point d'arrivée sont les mêmes que celles au point de départ. Ce n'est plus le cas avec un système de coordonnées quelconques.
Soit en un point A un vecteur v_A de coordonnées v^i_A. On transporte parallèlement ce vecteur en un point B, avec un déplacement infinitésimal $dx = \overrightarrow{AB}$. On obtient un vecteur v_B de coordonnées v^i_b avec un écart dv avec le vecteur d'origine : $v_B = v_A + dv$.
En faisant l'hypothèse de la linéarité dans le cas d'un déplacement infinitésimal, cet écart peut s'exprimer comme un produit d'un tableau de coefficients (qui ne possède pas les propriétés requises pour être considéré comme un tenseur) appelé coefficients de connexion, coefficients de Christoffel ou symboles de Christoffel, notés Γ^i_{jk} par le vecteur déplacé et par le déplacement, plus précisément :

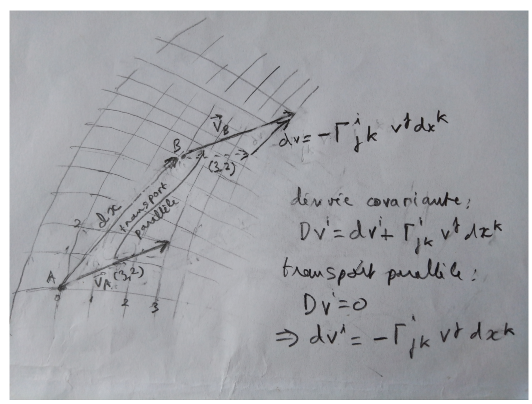
$$dv^i = -\Gamma^i_{jk} v^j dx^k$$

donc

$$v_B{}^i = v_A{}^i - \Gamma^i_{jk} v^j dx^k$$

Dans le cas d'un vecteur covariant v_i, on a

$$dv_i = \Gamma^j_{ik} v_j dx^k$$



3 Dérivée covariante

La dérivée covariante représente la véritable variation d'un vecteur, obtenue en compensant les variations de coordonnées dues au système de coordonnées.
La dérivée covariante Dv se calcule à partir de la dérivée ordinaire dv et des symboles de Christoffel :

$$Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j dx^k$$

Dans le cas du transport parallèle, la dérivée covariante est nulle :

$$Dv^i = 0 = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j dx^k$$

On retrouve donc la formule précédente :

$$dv^i = -\Gamma^i_{jk} v^j dx^k$$

Pour un vecteur covariant v_i, on a :

$$Dv_i = dv_i - \Gamma^j_{ik} v^j dx^k$$

et pour un tenseur quelconque, par exemple

$$DA^{ij}_{kl} = dA^{ij}_{kl} + \Gamma^i_{mn} A^{mj}_{kl} dx^n + \Gamma^j_{mn} A^{im}_{kl} dx^n - \Gamma^m_{kn} A^{ij}_{ml} dx^n - \Gamma^m_{ln} A^{il}_{km} dx^n$$

4 Espaces euclidiens, riemanniens et systèmes de coordonnées

Dans un espace euclidien, il est possible et plus simple d'utiliser un système de coordonnées orthonormé. C'est par contre impossible dans un espace riemannien courbe : par exemple on ne peut pas "plaquer" un quadrillage sur une sphère. Dans ce cas on est obligé d'utiliser un système de coordonnées curviligne. Par contre, rien n'empêche d'utiliser un système de coordonnées curvilignes dans un espace euclidien, par exemple un système de coordonnées polaires dans le plan euclidien. Ca permet notamment de faire la différence entre ce qui provient de la courbure de l'espace et de la courbure du système de coordonnées.

5 Exemple : système de coordonnées polaires dans le plan euclidien

Le plan euclidien est muni d'une part d'un système de coordonnées orthonormées (x, y), et d'autre part d'un système de coordonnées polaires (r, θ).
Les coordonnées euclidiennes peuvent de calculer à partir des coordonnées polaires :

- $x = r\ cos\ \theta$
- $y = r\ sin\ \theta$

Les vecteurs de base du système de coordonnées polaires (e_r, e_θ) peuvent s'exprimer en fonction de ceux du système de coordonnées cartésiennes (e_x, e_y) :

- $e_r = \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y = cos\ \theta\ e_x + sin\ \theta\ e_y$
- $e_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} e_y = -r\ sin\ \theta\ e_x + r\ cos\ \theta\ e_y$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\ \theta & sin\ \theta \\ -r\ sin\ \theta & r\ cos\ \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\ \theta & sin\ \theta \\ -r\ sin\ \theta & r\ cos\ \theta \end{pmatrix}$$

Réciproquement

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} cos\ \theta & -\frac{1}{r} sin\ \theta \\ sin\ \theta & \frac{1}{r} cos\ \theta \end{pmatrix}$$

6 Transport parallèle et connexion affine dans le système de coordonnées polaires

Au point A, on a un vecteur v de coordonnées cartésiennes (v^x, v^y) et de coordonnées polaires (v^r, v^θ). On transporte parallèlement ce vecteur en un point B avec $\overrightarrow{AB} = u$ de coordonnées polaires (u^r, u^θ) (u au lieu de dx pour éviter la confusion avec la première coordonnée cartésienne) , en conservant ses coordonnées cartésiennes. On considère qu'on obtient le même vecteur v en B.
D'autre part, on transporte ce vecteur en conservant ses coordonnées polaires. On obtient un vecteur $v' = v^r e'_r + v^\theta e'_\theta$ où (e'_r, e'_θ) est la base polaire en B.
La différence v" = v' - v correspond à $\Gamma^i_{jk} v^j u^k$, autrement dit $v^i = v'^i - \Gamma^i_{jk} v^j u^k$. On retrouve la formule précédente ${v_B}^i = {v_A}^i - \Gamma^i_{jk} v^j dx^k$.
On calcule les vecteurs de base polaires en B :

- $e'_r = e_r + \frac{\partial e_r}{\partial r} u^r + \frac{\partial e_r}{\partial \theta} u^\theta = e_r + \frac{e_\theta}{r} u^\theta$
- $e'_\theta = e_\theta + \frac{\partial e_\theta}{\partial r} u^r + \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} u^\theta = e_\theta + \frac{e_\theta}{r} u^r - r e_r u^\theta$

étant donné que

- $\frac{\partial e_r}{\partial r} = 0$
- $\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = -sin\ \theta\ e_x + cos\ \theta\ e_y = \frac{e_\theta}{r}$
- $\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = -sin\ \theta\ e_x + cos\ \theta\ e_y = \frac{e_\theta}{r}$
- $\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -r\ cos\ \theta\ e_x - r\ sin\ \theta\ e_y = -r e_r$

On a alors :

$$v' = v^r e'_r + v^\theta e'_\theta$$

$$= v^r (e_r + \frac{e_\theta}{r} u^\theta) + v^\theta (e_\theta + \frac{e_\theta}{r} u^r - r e_r u^\theta)$$

$$= v^r e_r + v^\theta e_\theta + v^r \frac{e_\theta}{r} u^\theta + v^\theta (\frac{e_\theta}{r} u^r - r e_r u^\theta)$$

Etant donné que v' = v + v" et $v = v^r e_r + v^\theta e_\theta$, on a :

$$v'' = v^r \frac{e_\theta}{r} u^\theta + v^\theta (\frac{e_\theta}{r} u^r - r e_r u^\theta)$$

$$= -r v^\theta u^\theta e_r + \frac{1}{r} (v^r u^\theta + v^\theta u^r) e_\theta$$

En développant la formule $v''^i = \Gamma^i_{jk} v^j u^k$ et en identifiant les coefficients ci-dessus avec les symboles de Christoffel, on a :

$$v'' = \Gamma^r_{\theta\theta} v^\theta u^\theta e_r + \Gamma^\theta_{r\theta} v^r u^\theta e_\theta + \Gamma^\theta_{\theta r} v^\theta u^r e_\theta$$

avec les valeurs suivantes des symboles de Christoffel :

- $\Gamma^r_{\theta\theta} = -r$
- $\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}$
- Les autres symboles sont nuls.

7 Cas général

On refait les calculs des coordonnées polaires mais en utilisant des formules générales au lieu des formules spécifiques à ce système de coordonnées. On a :

$$\frac{\partial e_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} x e_x + \frac{\partial^2}{\partial r^2} y e_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial e_r}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial x}{\partial r}e_x + \frac{\partial y}{\partial r}e_y) = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}xe_x + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial r}ye_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta dr} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta dr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta dr} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta dr} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial x}{\partial \theta}e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}e_y) = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}xe_x + \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial \theta}ye_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta} & \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta} & \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial x}{\partial \theta}e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}e_y) = \frac{d^2}{d\theta^2}xe_x + \frac{d^2}{d\theta^2}ye_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

et

$$e'_r = e_r + \frac{\partial e_r}{\partial r}u^r + \frac{\partial e_r}{\partial \theta}u^\theta = e_r + (u^r \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{pmatrix} + u^\theta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta dr} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta dr} \end{pmatrix})A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

$$e'_\theta = e_\theta + \frac{\partial e_\theta}{\partial r}u^r + \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta}u^\theta = e_\theta + (u^r \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta} & \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta} \end{pmatrix} + u^\theta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{pmatrix})A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

Comme précédemment, on considère un vecteur v de coordonnées cartésiennes (v^x, v^y) et de coordonnées polaires (v^r, v^θ) au point A. On transporte parallèlement ce vecteur en un point B avec $\overrightarrow{AB} = u$ de coordonnées polaires (u^r, u^θ), en conservant ses coordonnées cartésiennes. On obtient le même vecteur v en B.
D'autre part, on transporte ce vecteur en conservant ses coordonnées polaires. On obtient un vecteur $v' = v^r e'_r + v^\theta e'_\theta$ où (e'_r, e'_θ) est la base polaire en B.
La différence v" = v' - v correspond à $\Gamma^i_{jk}v^j u^k$, autrement dit $v^i = v'^i - \Gamma^i_{jk}v^j u^k$.

$$v'' = (v^r(u^r \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \end{pmatrix} + u^\theta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta dr} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta dr} \end{pmatrix}) + v^\theta(u^r \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta} & \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta} \end{pmatrix} + u^\theta \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}))A^{-1} \begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \end{pmatrix}$$

Etant donné que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix}$$

on a

$$v'' = (v^r u^r(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y}) + v^r u^\theta(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta dr}\frac{\partial r}{\partial y}) + v^\theta u^r(\frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y}) + v^\theta u^\theta(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}\frac{\partial r}{\partial y}))e_r$$

$$+(v^r u^r(\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}) + v^r u^\theta(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta dr}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta dr}\frac{\partial \theta}{\partial y}) + v^\theta u^r(\frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}) + v^\theta u^\theta(\frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}))e_\theta$$

D'autre part, on a

$$v'' = (\Gamma^r_{rr}v^r u^r + \Gamma^r_{r\theta}v^r u^\theta + \Gamma^r_{\theta r}v^\theta u^r + \Gamma^r_{\theta\theta}v^\theta u^\theta)e_r + (\Gamma^\theta_{rr}v^r u^r + \Gamma^\theta_{r\theta}v^r u^\theta + \Gamma^\theta_{\theta r}v^\theta u^r + \Gamma^\theta_{\theta\theta}v^\theta u^\theta)e_\theta$$

On identifie donc les symboles de Christoffel :

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\Gamma^r_{r\theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta dr}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\Gamma^r_{\theta r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial \theta}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\Gamma^\theta_{rr} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial\theta dr}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial\theta dr}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

Ces formules se généralisent à un espace de dimension quelconque avec un système de coordonnées orthonormé $(X^1, ..., X^n)$ et un système de coordonnées curvilignes $(Y_1, ...Y_n)$:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{d^2 X^l}{dY^k dY^j}\frac{dY^i}{dX^l}$$

avec sommation implicite sur l conformément à la notation d'Einstein.

8 Calcul des symboles de Christoffel en fonction du tenseur métrique

Le tenseur métrique g_{ij} a pour composantes les produits scalaires des vecteurs de base : $g_{ij} = e_i.e_j$. On a donc :

$$dg_{ij} = de_i.e_i + e_i.de_j = \Gamma^l_{ik} dx^k e_l.e_j + \Gamma^l_{jk} dx^k e_l.e_i = (g_{lj}\Gamma^l_{ik} + g_{li}\Gamma^l_{jk})dx^k.$$

On note $\Gamma_{ik,j} = g_{lj}\Gamma^l_{ik}$.
On a alors $\Gamma^m_{ik} = g^{mj}\Gamma_{ik,j}$.
Avec cette notation, on peut écrire :

$$dg_{ij} = (\Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i})dx^k$$

d'où

$$\partial_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i}$$

Par permutation d'indices, on a les égalités :

- $\Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i} = \partial_k g_{ij}$
- $\Gamma_{ki,j} + \Gamma_{ji_k} = \partial_i g_{kj}$
- $\Gamma_{ij,k} + \Gamma_{kj,i} = \partial_j g_{ik}$

En soustrayant la première égalité et en ajoutant la deuxième et la troisième et en tenant compte du fait que $\Gamma_{ij,k} = \Gamma_{ji,k}$ et après simplification il reste :

$$2\ \Gamma_{ij,k} = -\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik}$$

que l'on peut aussi écrire

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij})$$

ou

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{jm} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij})$$

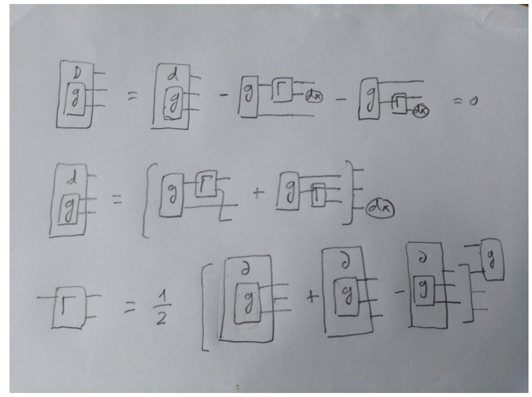
Une autre méthode consiste à partir du fait que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle :

$$Dg_{ij} = dg_{ij} - g_{lj}\Gamma^l_{ik}dx^k - g_{il}\Gamma^l_{jk}dx^k = 0$$

d'où

$$dg_{ij} = (g_{lj}\Gamma^l_{ik} + g_{il}\Gamma^l jk)dx^k = (\Gamma_{ik,j} + \Gamma_{jk,i})dx^k$$

On retrouve ainsi la formule trouvée précédemment, et on peut terminer les calculs de façon identique pour aboutir au même résultat.



9 Equation des géodésiques

Dire qu'une particule suit une trajectoire géodésique équivaut à dire que sa vitesse se transporte parallèlement dans sa propre direction. Si la particule est à un instant t en un point A avec une vitesse v^i, en t + dt elle se trouve en un point B avec $\overrightarrow{AB} = v\ dt$ et la vitesse en B a pour composantes $v^i - \Gamma^i_{jk}v_jv_kdt$. On a donc $\frac{dv_i}{dt} = -\Gamma^i_{jk}v^jv^k$.

10 Le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

Considérons un vecteur v en un point A. On On transporte parallèlement ce vecteur en un point B avec $\overrightarrow{AB} = dx$, puis en un point C avec $\overrightarrow{BC} = dy$. D'autre part, on transporte parallèlement ce vecteur de A en D avec $\overrightarrow{AD} = dy$ puis de D en C. La différence entre les deux vecteurs obtenus peut s'exprimer en fonction du tenseur de courbure R^i_{klm}. Plus précisément, on a

$$dv^i = R^i_{klm}v^kdx^ldy^m$$

avec

$$R^i_{klm} = \partial_l\Gamma^i_{km} - \partial_m\Gamma^i_{kl} + \Gamma^p_{km}\Gamma^i_{pl} - \Gamma^p_{kl}\Gamma^i_{pm}$$

Le vecteur v transporté parallèlement en B a pour composantes $v^i_B = v^i - \Gamma^i_{jk}v^jdx^k$.
Les symboles de Christoffel en B ont pour valeur ${\Gamma_B}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \partial_l\Gamma^i_{jk}dx^l$.
Le vecteur v transporté parallèlement de B en C a pour composantes

$$v^i_C = v^i_B - {\Gamma_B}^i_{jk}v^j_Bdy^k$$

$$= v^i - \Gamma^i_{jk}v^jdx^k - (\Gamma^i_{jk} + \partial_l\Gamma^i_{jk}dx^l)(v^j - \Gamma^j_{lm}v^ldx^m)dy^k$$

$$= v^i - \Gamma^i_{jk}v^jdx^k - \Gamma^i_{jk}v^jdy^k - \partial_l\Gamma^i_{jk}dx^lv^jdy^k + \Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{lm}v^ldx^mdy^k$$

On obtient de même les composantes du vecteur v transporté parallèlement de A en D puis de D en C en permutant dx et dy :

$$v'^i_C = v^i - \Gamma^i_{jk}v^jdy^k - \Gamma^i_{jk}v^jdx^k - \partial_l\Gamma^i_{jk}dy^lv^jdx^k + \Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{lm}v^ldy^mdx^k$$

On fait la différence :

$$v'^i_C - v^i_C = \partial_l\Gamma^i_{jk}dx^lv^jdy^k - \partial_l\Gamma^i_{jk}dy^lv^jdx^k + \Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{lm}v^ldy^mdx^k - \Gamma^i_{jk}\Gamma^j_{lm}v^ldx^mdy^k$$

ce qui donne la formule

$$R^i_{klm} = \partial_l\Gamma^i_{km} - \partial_m\Gamma^i_{kl} + \Gamma^p_{km}\Gamma^i_{pl} - \Gamma^p_{kl}\Gamma^i_{pm}$$