

Optimisation

Optimisation avec contraintes d'égalité : multiplicateurs de Lagrange

Il s'agit de chercher un vecteur x de \mathbb{R}^n tel que $f(x)$ soit minimal et le vecteur $h(x) = 0$, (avec $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ différentiable) ce que l'on écrit :

- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$
- $h(x) = 0$

Intuitivement, au point de la région de \mathbb{R}^n où $h(x) = 0$ correspondant au maximum de $f(x)$, la courbe ou surface de niveau de f est tangente à la région où $h(x) = 0$. Le gradient de f et de h étant perpendiculaire à la courbe ou surface de niveau de f et h respectivement, les gradients de f et de h sont alignés.

On dit que x est un point régulier pour la contrainte $h(x) = 0$ si

- $h(x) = 0$
- les vecteurs $\nabla h_i(x)$ sont linéairement indépendants

∇a désigne le gradient de a c'est-à-dire le vecteur $(\partial a / \partial x_1, \dots, \partial a / \partial x_n)$

Théorème de Lagrange ou règle des multiplicateurs de Lagrange ou conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre :

Si x est un point régulier solution du problème d'optimisation avec contraintes d'égalité, alors il existe un unique vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vérifiant :

$$\nabla f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla h_j(x) = 0$$

Les composantes λ_j du vecteur λ sont appelées multiplicateurs de Lagrange.

On définit le lagrangien associé au problème par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(x)$$

$$\text{(ou } L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x})$$

On passe facilement d'une forme à l'autre en remplaçant λ_j par $-\lambda_j$)

Les conditions d'optimalité du premier ordre peuvent alors s'écrire :

- $\nabla L(\mathbf{x}, \lambda) = 0$
- $h(\mathbf{x}) = 0$

ou

- $\partial L(\mathbf{x}, \lambda) / \partial x_i = 0$
- $\partial L(\mathbf{x}, \lambda) / \partial \lambda_j = 0$

Optimisation avec contraintes d'inégalité : conditions de Kuhn et Tucker

Il s'agit de résoudre

- $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$
- $g(\mathbf{x}) \leq 0$

Pour un minimum \mathbf{x} où les gradients de g_i
sont linéairement indépendants, il existe
des multiplicateurs uniques $\mu_i \geq 0$ tels que

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = 0$$

En définissant le lagrangien

$$L(\mathbf{x}, \mu) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(\mathbf{x})$$

on a les conditions de Kuhn et Tucker :

- $\nabla L(x, \mu) = 0$
- $\mu_i g(x) = 0$
- $\mu_i \geq 0$
- $g_i(x) \leq 0$

• Cas général avec conditions d'égalité et d'inégalité

Il s'agit de résoudre le problème suivant :

- $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$
- $h(x) = 0$
- $g(x) \leq 0$

On définit le lagrangien :

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x)$$

Les conditions de Lagrange - Kuhn - Tucker sont :

- $\nabla L(x, \mu, \lambda) = 0$
- $h_i(x) = 0$
- $\mu_i g(x) = 0$
- $\mu_i \geq 0$
- $g_i(x) \leq 0$

Principe du maximum de Pontryagin

Il s'agit de déterminer une fonction u qui commande pendant un intervalle de temps $[0, T]$ un système dont l'état est représenté par le vecteur X de \mathbb{R}^n , de façon optimale par rapport à un critère défini à chaque instant par $f(X(t-1), u(t))$ et un critère final $m(X(T))$.

Modèle discret

Le problème s'écrit ainsi :

$$\text{Max } J = \sum_{t=1}^T f(X(t-1), u(t)) + m(X(T))$$

$$X(t) - X(t-1) = a(t, X(t-1), u(t)) \quad t = 1 \dots T$$

$u(t) \in U$ ensemble des commandes possibles

$$X(0) = X_0$$

On définit le lagrangien de ce programme d'optimisation de la façon suivante :

$$L(X, u, \lambda) = \sum_{t=1}^T (f(t, X(t-1), u(t)) - \lambda(t) \cdot (X(t) - X(t-1) - a(t, X(t-1), u(t))) + m(X(T)) + \lambda(0) \cdot (X_0 - X(0))$$

(le \cdot désigne le produit scalaire de vecteurs)

Il s'agit d'un problème d'optimisation avec contraintes d'égalité. Les conditions d'optimalité sont obtenues en dérivant le lagrangien :

- $\partial L(x, \lambda) / \partial x_i = 0$
- $\partial L(x, \lambda) / \partial \lambda_j = 0$

Dans le cas présent, les inconnues sont les $X(t)$ et les $u(t)$. On peut considérer que le vecteur des inconnues est la "concaténation" des vecteurs $X(t)$ et $u(t)$.

Les conditions d'optimalité sont donc :

- $\partial L(X, u, \lambda) / \partial x(t) = 0$
- $\partial L(X, u, \lambda) / \partial u(t) = 0$
- $\partial L(X, u, \lambda) / \partial \lambda(t) = 0$

c'est-à-dire :

- en dérivant par rapport à $X(t)$ ($t=0 \dots T-1$) :

$$\partial f(t, X(t-1), u(t)) / \partial X(t-1) + \lambda(t) (1 + \partial a(t, X(t-1), u(t)) / \partial X(t-1)) - \lambda(t-1) = 0$$

(le terme $-\lambda(t-1)$ provient de la dérivation du $(t-1)$ ème terme du lagrangien)

- en dérivant par rapport à $X(T)$:

$$-\lambda(T) + m'(X(T)) = 0$$

- en dérivant par rapport à $u(t)$:

$$\partial f(t, X(t-1), u(t)) / \partial u(t) + \lambda(t) \partial f(t, X(t-1), u(t)) / \partial u(t) = 0$$

- en dérivant par rapport à $\lambda(t)$ on retrouve une des conditions du problème :

$$X(t) - X(t-1) = a(t, X(t-1), u(t))$$

Après simplification, on obtient :

- $X(t) - X(t-1) = a(t, X(t-1), u(t))$
- $X(0) = X_0$
- $\lambda(t) - \lambda(t-1) = -(\partial f(t, X(t-1), u(t)) / \partial X(t-1) + \lambda(t) \partial a(t, X(t-1), u(t)) / \partial X(t-1)), t=1 \dots T$
- $\lambda(T) = m'(X(T))$
- $\partial f(t, X(t-1), u(t)) / \partial u(t) + \lambda(t) \partial a(t, X(t-1), u(t)) / \partial u(t) = 0$

Formulation lagrangienne et formulation hamiltonienne

On peut condenser ces relations de deux façons différentes en définissant une certaine fonction qui regroupe suffisamment d'informations pour qu'on puisse écrire ces relations à partir de cette fonction. Cette fonction est appelée lagrangien instantané (pour ne pas confondre avec le lagrangien "global" intégré sur le temps défini précédemment) dans le premier cas, et hamiltonien dans le deuxième cas.

Formulation lagrangienne

On appelle lagrangien instantané du système dynamique la fonction définie par :

$$L(t, X(t-1), dX(t-1), u(t), \lambda(t)) = f(t, X(t-1), u(t)) - \lambda(t) \cdot (dX(t-1) - a(t, X(t-1), u(t)))$$

$$\text{avec } dX(t-1) = X(t) - X(t-1)$$

Les relations précédentes s'écrivent alors (en écrivant $L(t)$ au lieu de $L(t, X(t-1), dX(t-1), u(t), \lambda(t))$):

- $\partial L(t) / \partial \lambda = 0$
- $X(0) = X_0$
- $\partial L(t) / \partial X(t-1) = \partial L(t) / \partial dX(t) - \partial L(t-1) / \partial dX(t)$
- $\lambda(T) = m'(X(T))$
- $\partial L(t) / \partial u(t) = 0$

Formulation hamiltonienne

On appelle hamiltonien du système dynamique la fonction définie par :

$$H(t, X(t-1), u(t), \lambda(t)) = f(t, X(t-1), u(t)) + \lambda(t) \cdot a(t, X(t-1), u(t))$$

Les relations précédentes s'écrivent alors (en écrivant $H(t)$ au lieu de $H(t, X(t-1), u(t), \lambda(t))$):

- $X(t) - X(t-1) = \partial H(t) / \partial \lambda$

- $X(0) = X_0$
- $\lambda(t) - \lambda(t-1) = -\partial H(t) / \partial X(t-1)$
- $\lambda(T) = m'(X(T))$
- $\partial H(t) / \partial u(t) = 0$

Le modèle continu

Il s'agit de résoudre le programme d'optimisation suivant :

$$\max J = \int_0^T f(t, X(t), u(t)) dt + m(X(T))$$

$$dX(t)/dt = a(t, X(t), u(t))$$

$u(t) \in U$ ensemble des commandes possibles

$$X(0) = X_0$$

Les résultats obtenus pour le modèle discret se généralisent au modèle continu.

Formulation lagrangienne

On appelle lagrangien instantané du système dynamique la fonction définie par :

$$L(t, X(t), V(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, X(t), u(t)) - \lambda(t) \cdot (V(t) - a(t, X(t), u(t)))$$

$$\text{avec } V(t) = dX(t)/dt$$

Les relations précédentes s'écrivent alors (en écrivant $L(t)$ au lieu de $L(t, X(t), dX(t)/dt, u(t), \lambda(t)$):

- $\partial L(t) / \partial \lambda = 0$
- $X(0) = X_0$
- $\partial L(t) / \partial X(t) = d/dt (\partial L(t) / \partial V(t))$
- $\lambda(T) = m'(X(T))$
- $\partial L(t) / \partial u(t) = 0$

Formulation hamiltonienne

On appelle hamiltonien du système dynamique la fonction définie par :

$$H(t, X(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, X(t), u(t)) + \lambda(t) \cdot a(t, X(t), u(t))$$

Cette définition rappelle celle du hamiltonien en mécanique ($H = p dq/dt - L$) : $-f$ correspond au lagrangien L , λ correspond à l'impulsion p .

Les conditions d'optimalité s'écrivent alors (en écrivant $H(t)$ au lieu de $H(t, X(t), u(t), \lambda(t))$):

- $dX(t)/dt = \partial H(t)/\partial \lambda$
- $X(0) = X_0$
- $d\lambda(t)/dt = -\partial H(t)/\partial X(t)$
- $\lambda(T) = m'(X(T))$
- $\partial H(t)/\partial u(t) = 0$

Le problème initial, difficile, consistant à trouver la fonction u optimale, est ainsi ramené à un problème plus simple consistant à déterminer les valeurs initiales (ou finales si on inverse le sens du temps) du vecteur adjoint λ .

Système augmenté

On peut associer au système défini par

$$dX(t)/dt = a(t, X(t), u(t))$$

un système augmenté défini par

- $dX(t)/dt = a(t, X(t), u(t))$
- $dX_0(t)/dt = f(t, X(t), u(t))$

La coordonnée supplémentaire X_0 représente le gain cumulé dans le cas d'un problème de maximisation, ou le coût cumulé dans le cas d'un problème de minimisation.

Notons $X' = (X, X_0)$ et $a' = (a, f)$.

L'objectif :

$$\max_{\underline{\quad}} J = \int_0^T f(t, X(t), u(t)) dt + m(X(T))$$

devient $\max J = m'(X'(T)) = X_0(T) + m(X(T))$.

Le hamiltonien devient $H'(t, X(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda'(t) \cdot a'(t, X(t), u(t))$ avec $\lambda' = (\lambda, 1)$

Théorème du principe du maximum de Pontryagin

Soit un système régi par les équations : $dx_i/dt = f_i(x, u)$. Soit $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, une commande admissible telle que la trajectoire correspondante $x(t)$, issue du point x_0 à l'instant t_0 passe à l'instant t_1 par un point de la droite D . Pour que la commande $u(t)$ et la trajectoire $x(t)$ soient optimales il est nécessaire qu'existe un vecteur fonction $\lambda(t) = \lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)$ continu et non nul, correspondant aux fonctions $u(t)$ et $x(t)$, tel que :

- 1° quel que soit t , $t_0 \leq t \leq t_1$, la fonction $H(\lambda(t), x(t), u)$ de la variable u appartenant à U atteint au point $u = u(t)$ son maximum :
 $H(\lambda(t), x(t), u(t)) = M(\lambda(t), x(t))$
avec $H(\lambda, x, u) = \lambda \cdot f(x, u)$ et $M(\lambda, x) = \sup_{u \in U} H(\lambda, x, u)$
- 2° à l'instant final t_1 soient vérifiées les relations
 $\lambda_0(t_1) \leq 0, M(\lambda(t_1), x(t_1)) = 0$.

Si par ailleurs les grandeurs $\lambda(t)$, $x(t)$ et $u(t)$ satisfont aux systèmes :

- $dx_i/dt = \partial H/\partial \lambda_i, i=0\dots n$
- $d\lambda_i/dt = -\partial H/\partial x_i$

et à la condition 1°, les fonctions $\lambda_0(t)$ et $M(\lambda(t),x(t))$ de la variable t sont constantes, de sorte qu'on peut vérifier la relation 2° non nécessairement à l'instant t_1 , mais à un instant quelconque t compris entre t_0 et t_1 .

Généralisations

On considère un système défini par

$$dX(t)/dt = a(t,X(t),u(t))$$

On veut déterminer une fonction u appartenant à un ensemble de commandes admissibles U qui conduit le système depuis un état X_0 appartenant à un sous-ensemble M_0 de R^n jusqu'à un état X_1 appartenant à un sous-ensemble M_1 de R^n , et qui minimise un coût (ou maximise un gain) défini par :

$$C(T, u) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt + m(x(T))$$

On définit le hamiltonien de ce système :

$$H(t, X, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda_0 f(t, X, u) + \lambda \cdot a(t, X, u)$$

Si la commande u est optimale, alors il existe une application λ de $[0, T]$ dans R^n et un réel λ_0 tels que (λ, λ_0) est non trivial et tels que pour presque tout t compris entre 0 et T on a :

- $dX(t)/dt = \partial H/\partial \lambda(t, X(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t))$
- $d\lambda(t)/dt = -\partial H/\partial X(t, X(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t))$
- $H(t, X(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t)) = \max_{v \in U} H(t, X(t), \lambda(t), \lambda_0, v)$ presque partout entre 0 et T si $\lambda_0 < 0$ (remplacer max par min si $\lambda_0 > 0$)

Si u est continue au temps T , cette condition peut s'écrire $H(t, X(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t)) = -\lambda_0 \partial m/\partial t(T, X(T))$. Dans le cas où $u \in R^n$ (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de condition sur la commande) cette condition devient $\partial H/\partial u = 0$

- Si T n'est pas fixé, on a la condition de transversalité sur le hamiltonien : $\max_{v \in U} H(t, X(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t)) = -\lambda_0 \partial m/\partial t(T, X(T))$
- Si M_0 ou M_1 a des espaces tangents $T(X(0), M_0)$ en $X(0)$ et $T(X(T), M_1)$ en $X(T)$ alors λ peut être construit de façon à vérifier les conditions de transversalité sur le vecteur adjoint λ :
 - $\lambda(0)$ perpendiculaire à $T(X(0), M_0)$
 - $\lambda(T) - \lambda_0 \partial m/\partial X(T, X(T))$ perpendiculaire à $T(X(T), M_1)$
- $d/dt H(t, X(t), \lambda(t), \lambda_0, u(t)) = \partial H/\partial t$ pour presque tout t entre 0 et T

Processus optimaux paramétrés

On considère un système gouverné par les équations :

$$dx_i/dt = f_i(x,u,w) \quad i=1\dots n$$

On demande de choisir un vecteur w_0 valeur du paramètre w qui reste constante pendant toute la durée de l'évolution du système. On veut minimiser l'intégrale de t_0 à t_1 de $f_0(x(t),u(t),w_0)$ dt.

Etant donnés une commande admissible u et un vecteur w_0 tels que la trajectoire associée $x(t)$ vérifie les conditions $x(t_0) = x_0$, $x_0(t_0) = 0$, $x(t_1) = x_1$. Pour que les grandeurs $u(t)$, $x(t)$ et w_0 soient solution du problème optimal posé, il est nécessaire qu'existe un vecteur fonction $\lambda(t)$ continu et non nul tel que :

- 1° les fonctions x , λ et u et le vecteur w_0 vérifient :
 - $dx_i/dt = \partial H(\lambda(t),x(t),u(t),w_0)/\partial \lambda_i$
 - $d\lambda_i/dt = -\partial H/\partial x_i$
- 2° La fonction H atteint au point $u=u(t)$ son maximum :

$$H(\lambda(t),x(t),u(t),w_0) = M(\lambda(t),x(t),w_0)$$
- 3° au point initial t_0 soient vérifiées les relations
 - $\lambda_0(t_0) \leq 0$
 - $M(\lambda(t_0),x(t_0),w_0) = 0$
- 4° aient lieu les égalités

somme de $a=0$ à n de intégrale de t_0 à t_1 de $\lambda_a(t) \partial f_a(x(t),u(t),w_0)/\partial w_r dt = 0$, $r=1\dots m$

Si par ailleurs les grandeurs $\partial(t)$, $x(t)$, w_0 et $u(t)$ satisfont aux conditions 1° et 2°, alors les fonctions $\partial_0(t)$ et $M(\partial(t),x(t),w_0)$ de la variable t sont constantes, de sorte qu'on peut vérifier la condition 3° non nécessairement à l'instant t_0 mais à tout instant compris entre t_0 et t_1 .

Processus optimaux à retard

L'évolution du système est décrit par le système d'équations :

$$dx(t)/dt = f(x(t),x(t-T),u(t)).$$

Soit $u(t)$ une commande admissible telle que la trajectoire $x(t)$ correspondante passe à un instant $t_1 > t_0$ par un point de la variété L . Pour que la commande $u(t)$ soit optimale, il est nécessaire qu'existe un vecteur fonction $\lambda(t)$ non nul tel que :

- 1° pour tout t compris entre t_0 et t_1 , $H(\lambda(t),x(t),x(t-T),u(t)) = M(\lambda(t),x(t),x(t-T))$
- 2° à l'instant final t_1 soient satisfaites les relations
 - $\lambda_0(t_1) \leq 0$
 - $M(\lambda(t_1),x(t_1),x(t_1-T)) = 0$
- 3° le vecteur $\lambda(t_1)$ soit orthogonal au plan tangent au point $x(t_1)$ à la variété S_1 .

Exemple : commande optimale d'un ressort non linéaire

L'objectif est d'amener une masse fixée à un ressort d'une position initiale quelconque le plus près possible de sa position d'équilibre et de faire en sorte qu'elle se déplace le moins possible. L'état du système est décrit par (x,y) où x est la position de la masse et y sa vitesse. (x,y) est appelée position dans l'espace des phases. Le système est commandé par une force u exercée sur la masse, dont le coût est $1/2 u^2$.

Les équations qui déterminent l'évolution du système sont :

- $dx/dt = y$

- $dy/dt = -x - 2x^3 + u$

Formulation lagrangienne

Le lagrangien instantané est $L = c_x x^2 + c_y y^2 + c_u u^2 + \lambda_x (y - v_x) + \lambda_y (-x - 2x^3 + u - v_y)$ avec $v_x = dx/dt$ et $v_y = dy/dt$

Les conditions d'optimalité sont :

- $\partial L / \partial x = d/dt (\partial L / \partial v_x) \Rightarrow 2 c_x x - \lambda_y (1 + 6x^2) = -d\lambda_x / dt \Rightarrow d\lambda_x / dt = -2 c_x x + \lambda_y (1 + 6x^2)$
- $\partial L / \partial y = d/dt (\partial L / \partial v_y) \Rightarrow 2 c_y y + \lambda_x = -d\lambda_y / dt \Rightarrow d\lambda_y / dt = -2 c_y y - \lambda_x$
- $d\lambda_y / dt = -\partial H / \partial y = -\lambda_x \Rightarrow \lambda_x = -d\lambda_y / dt \Rightarrow d\lambda_y / dt = -\lambda_x$
- $\partial L / \partial u = 0 = 2 c_u u + \lambda_y \Rightarrow u = -\lambda_y / 2 c_u$

Formulation hamiltonienne

Le hamiltonien est $H = c_x x^2 + c_y y^2 + c_u u^2 + \lambda_x y + \lambda_y (-x - 2x^3 + u)$

Les conditions d'optimalité sont

- $d\lambda_x / dt = -\partial H / \partial x = -2 c_x x + \lambda_y (1 + 6x^2)$
- $d\lambda_y / dt = -\partial H / \partial y = -2 c_y y - \lambda_x$
- $\partial H / \partial u = 0 = 2 c_u u + \lambda_y \Rightarrow u = -\lambda_y / 2 c_u$

Exemple économique : modèle de Ramsey

Il s'agit de trouver la fonction $c(t)$ optimale qui maximise l'utilité :

$$\max U = \int_0^{\infty} u(c(t)) \exp(-at) dt$$

La commande $c(t)$ est la consommation au temps t . Le facteur $\exp(-at)$ permet de prendre en compte la préférence pour le présent.

Les équations qui régissent le système sont :

- $dk(t)/dt = f(k(t)) - c(t) - n k(t)$
- $k(0) = k_0$
- $k(t) \geq 0, c(t) \geq 0$

où k représente le capital et n le taux d'accroissement de la population.

Le hamiltonien est :

$$H(t) = u(c(t)) \exp(-at) + m(t) (f(k(t)) - c(t) - n k(t))$$

On pose $l(t) = m(t) \exp(at)$, donc $m(t) = l(t) \exp(-at)$

On a donc $H(t) = \exp(-at)(u(c(t)) + l(t)(f(k(t)) - c(t) - n k(t)))$

Les conditions d'optimalité sont :

- $\partial H / \partial c = 0 = u'(c(t)) - l(t) \Rightarrow l(t) = u'(c(t))$
- $dm/dt = -\partial H / \partial k$ ou $dl/dt = -\partial H / \partial k \exp(at) + al = l(n - f'(k) + a)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) (l(t) \exp(-at)) = \lim_{t \rightarrow \infty} k(t) (u'(c(t)) \exp(-at)) = 0$

On élimine le multiplicateur l :

$$dl/dt = du'(c(t))/dt = u'(c(t)) (n - f'(k) + a)$$

$$\Rightarrow (du'(c(t))/dt) / u'(c(t)) = n - f'(k) + a$$

$$\Leftrightarrow u''(c(t)) (dc(t)/dt) / u'(c(t)) = n - f'(k) + a$$

$$\Leftrightarrow (c(t) u''(c(t)) / u'(c(t))) (dc(t)/dt) / c(t) = n - f'(k) + a$$

$$\Rightarrow dc(t)/dt = u'(c(t)) / u''(c(t)) (n - f'(k) + a)$$

Le sentier optimal est donc caractérisé par les conditions :

- $dk/dt = f(k) - c - n k$
- $dc/dt = u'(c(t)) / u''(c(t)) (n - f'(k) + a)$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) (u'(c(t)) \exp(-at)) = 0$

Equation de Hamilton - Jacobi - Bellman

Cette équation concerne des problèmes d'optimisation du même type que le principe de Pontryagin.

On considère un ensemble de problèmes paramétrés par l'état initial y et l'instant de départ s :

$$\min_{J_s} J(y, s, u) = \int^T f(t, x(t), u(t)) dt + m(x(T))$$

$$dx(t)/dt = a(t, x(t), u(t))$$

$u(t) \in U$ ensemble des commandes possibles

$$x(s) = y$$

On définit :

$$V(y, s) = \min_{u \in U} J(y, s, u)$$

c'est-à-dire la valeur minimale de $J(y, s, u)$ quand u parcourt U .

Si V est différentiable en (y, s) alors l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman est satisfaite :

$$\partial V(x, t) / \partial t + \min (f(t, x, u) + \partial V(x, t) / \partial x \cdot a(t, x, u)) = 0$$

où $\partial V(x, t) / \partial x$ désigne le gradient de V et \cdot désigne le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\partial V(x, t) / \partial t + \min (f(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \partial V(x, t) / \partial x_i \cdot a_i(t, x, u)) = 0$$

avec la condition finale :

$$V(T, x) = m(x)$$

En définissant le hamiltonien suivant :

$$H(x, t, \lambda) = \min_{u \in U} (f(t, x, u) + \lambda \cdot a(t, x, u))$$

l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman devient :

$$\partial V(x, t) / \partial t + H(x, t, \partial V(x, t) / \partial x) = 0$$

Cette équation rappelle l'équation de Hamilton - Jacobi en physique :

$$\partial S / \partial t + H(q, t, \partial S / \partial q) = 0$$

V correspond à l'action S .

Equation de Hamilton - Jacobi - Bellman : cas discret

On considère un système d'état x commandé par u , le nouvel état étant déterminé par :

$$x' = a_d(x, u)$$

On appelle $V(x)$ le meilleur résultat qu'on peut obtenir à partir de l'état x . On a alors la forme discrète de l'équation d'Hamilton - Jacobi - Bellman :

$$V(x) = \min_{u \in U(x)} (f_d(x, u) + V(x')) = \min_{u \in U(x)} (f_d(x, u) + V(a_d(x, u)))$$

où $f_d(x, u)$ désigne la valeur à minimiser (ou le coût) associée à l'état x et l'action u .

Si u^* est l'action optimale, on a :

$$V(x) = f_d(x, u^*) + V(a_d(x, u^*))$$

Cette égalité est la forme discrète du principe de Pontryagin. On peut l'écrire sous la forme :

$$V(a_d(x, u^*)) - V(x) = -f_d(x, u^*)$$

Equation de Hamilton - Jacobi - Bellman : cas continu

L'équation d'évolution du système est :

$$dx/dt = a(x, u)$$

$V(x')$ peut être approché par :

$$V(x) + \sum_{i=1}^n \partial V / \partial x_i a_i(x, u) dt$$

Etant donné que $fd(x,u) = f(x,u) dt$, on a donc :

$$V(x) = \min_{u \in U(x)} (f(x, u) dt + V(x) + \sum_{i=1}^n \partial V / \partial x_i a_i(x, u) dt)$$

ce qui se simplifie en soustrayant $V(x)$ et en divisant par dt pour obtenir l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman (forme continue) :

$$\min_{u \in U(x)} (f(x, u) + \sum_{i=1}^n \partial V / \partial x_i a_i(x, u)) = 0$$

Si on applique cette équation à la commande optimale u^* on obtient :

$$f(x, u^*) + \sum_{i=1}^n \partial V / \partial x_i a_i(x, u^*) = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^n \partial V / \partial x_i a_i(x, u) = -f(x, u)$$

Dans le cas où f et a dépendent de t , cette équation se généralise en :

$$\min_{u \in U(x)} (f(t, x, u) + \partial V(x, t) / \partial t + \sum_{i=1}^n \partial V(x, t) / \partial x_i a_i(t, x, u)) = 0$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\partial V(x, t) / \partial t + \min_{u \in U(x)} (f(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \partial V(x, t) / \partial x_i a_i(t, x, u)) = 0$$

Equation de Hamilton - Jacobi - Bellman et principe de Pontryagin

On peut retrouver le principe de Pontryagin à partir de l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman. Ce principe peut être considéré comme une spécialisation de l'équation d'Hamilton - Jacobi - Bellman appliquée à la commande optimale u^* . Il est donné par l'équation précédemment obtenue :

$$f(x, u^*) + \sum_{i=1}^n \partial V / \partial x_i a_i(x, u^*) = 0$$

On définit :

$$\lambda_i = \partial V / \partial x_i$$

$$H(x, u, \lambda) = f(x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i(x, u)$$

L'équation d'Hamilton - Jacobi - Bellman donne :

$$H(x(t), u^*(t), \lambda(t)) = 0$$

La commande optimale u^* est celle qui minimise $H(x(t), u^*(t), \lambda(t))$.

Si u^* est déterminé par x , c'est-à-dire $u^* = p^*(x)$, alors le hamiltonien est une fonction de x et λ uniquement : $H(x, \lambda) = f(x, p^*(x)) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i(x, p^*(x))$

On a alors en différentiant par rapport à x :

$$\begin{aligned} \partial f(x, p^*(x)) / \partial x_i + \sum_{j=1}^n \partial \lambda_j / \partial x_i a_j(x, p^*(x)) + \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial a_i(x, p^*(x)) / \partial x_i = 0 \end{aligned}$$

car le hamiltonien est égal à 0 le long de la trajectoire optimale.

Etant donné la définition de $\lambda_i = \partial V / \partial x_i$ on a $\partial \lambda_i / \partial x_j = \partial / \partial x_j \partial / \partial x_i V = \partial / \partial x_i \partial / \partial x_j V = \partial \lambda_j / \partial x_i$

$$\begin{aligned} \text{Donc } d\lambda_i / dt &= \sum_{j=1}^n \partial \lambda_i / \partial x_j dx_j / dt \\ &= \sum_{j=1}^n \partial \lambda_j / \partial x_i dx_j / dt \\ &= \sum_{j=1}^n \partial \lambda_j / \partial x_i a_j(x, p^*(x)) \end{aligned}$$

On a donc

$$\partial f(x, p^*(x)) / \partial x_i + d\lambda_i / dt + \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial a_i(x, p^*(x)) / \partial x_i = 0$$

donc

$$d\lambda_i / dt = - \partial f(x, p^*(x)) / \partial x_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial a_i(x, p^*(x)) / \partial x_i = - \partial H / \partial x_i$$

avec

$$H(x, u, \lambda) = f(x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i(x, u)$$

Commandabilité

Un système est commandable ou contrôlable si pour tous x_0 et x_1 il existe un temps

T et une fonction de commande u amenant le système de x_0 à x_1 pendant le temps T.

Si le système est linéaire c'est-à-dire défini par $dx/dt = f(x,u) = Ax + Bu$ alors le système est commandable si la matrice de commandabilité $M = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$ a le rang maximum. Si le système n'est pas linéaire, la matrice de commandabilité peut être calculée à partir d'une version linéarisée du système.

Théorie des jeux discrets

Considérons un jeu à m joueurs avec un ensemble E de positions. A chaque position est associée un joueur à qui c'est le tour de jouer, ainsi qu'un ensemble de positions accessibles. Parmi toutes les positions, certaines sont des positions finales, à partir desquelles aucune position n'est accessible. A ces positions on associe un vecteur de m valeurs correspondant aux gains des joueurs. On peut également associer à chaque position un vecteur de m valeurs correspondant au vecteur final obtenu si chaque joueur joue le mieux possible. On peut déterminer ce vecteur de valeurs pour chaque position en partant des positions finales et en remontant vers la ou les positions initiales de la façon suivante : soit une position pour laquelle c'est au tour du joueur i de jouer. On peut déterminer son vecteur de valeurs si les vecteurs de valeurs de toutes les positions accessibles à partir de cette position ont été déterminés. Il s'agit du vecteur de valeurs dont la i -ème composante est maximale.

Cas particulier des jeux à 2 joueurs et à somme nulle

Dans ce cas, le vecteur valeur est de la forme $(v, -v)$ et peut être remplacé par un simple nombre v que le joueur 1 cherche à maximiser et le joueur 2 à minimiser.

Jeux différentiels : généralisation de la théorie d'Isaacs aux jeux à plusieurs joueurs et à somme non nulle

Un jeu différentiel est un système commandé par plusieurs joueurs. C'est un jeu continu que l'on peut obtenir par passage à la limite à partir d'un jeu discret.

L'état du jeu est représenté par un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ dont l'évolution est déterminée par l'équation $dx_j/dt = a_j(x,u)$ où u est une matrice avec $u_{ik} = k$ -ième composante de la commande du joueur i .

Le gain du joueur i est l'intégrale de $f_i(x,u) dt + H_i(s)$ où s est l'état final.

Lors de ce passage à la limite, la méthode de détermination du vecteur de valeurs des jeux discrets aboutit à l'équation :

$$\max(u_1, 1) \dots \max(u_n, n) \sum_j (\partial V_i / \partial x_j a_j(x,u) + f_i(x,u)) = 0$$

avec $\max(u_i, i) =$ vecteur dont la i -ème composante est maximale obtenu en faisant varier u_i .

En fonction d'une position x et du gradient du vecteur de valeurs V ($\lambda = \text{grad } V$) avec $\lambda_{ij} = \partial V_i / \partial x_j$ on détermine la commande optimale correspondante notée $u^*(x, \lambda)$.

On a alors :

$$\sum_j \partial V_i / \partial x_j a_j(x, u^*(x, \lambda)) + f_i(x, u^*(x, \lambda)) = 0.$$

En dérivant par rapport à x_k on obtient :

$$d/dt \partial V_i / \partial x_k + \sum_j \partial V_i / \partial x_j \partial a_j / \partial x_k (x, u^*(x, \lambda)) + \partial f_i / \partial x_k (x, u^*(x, \lambda)) = 0$$

En définissant le hamiltonien $H_i = \sum_j \partial V_i / \partial x_j a_j(x, u^*) + f_i(x, u^*)$

on obtient :

$$d\lambda_{ik}/dt = d/dt \partial V_i / \partial x_k = - \partial H_i / \partial x_k$$

Cas des jeux à 2 joueurs et à somme nulle

Le vecteur valeur V est de la forme (v, -v) et peut être remplacé par un simple nombre.

L'équation

$$\max(u_1, 1) \dots \max(u_n, n) \sum_j (\partial V_i / \partial x_j a_j(x, u) + f_i(x, u) = 0$$

$$\text{devient : } \max_{u_1} \min_{u_2} \sum_j (\partial V / \partial x_j a_j(x, u_1, u_2) + f(x, u_1, u_2) = 0$$

On retrouve l'équation ME d'Isaacs.

L'équation

$$\sum_j \partial V_i / \partial x_j a_j(x, u^*(x, \lambda)) + f_i(x, u^*(x, \lambda)) = 0.$$

devient

$$\sum_j \partial V / \partial x_j a_j(x, u^*(x, \lambda)) + f(x, u^*(x, \lambda)) = 0.$$

On retrouve l'équation ME2 d'Isaacs.

Cas d'un jeu à un joueur

On retrouve le problème de la commande optimale.

L'équation

$$d/dt \partial V_i / \partial x_k + \sum_j \partial V_i / \partial x_j \partial a_j / \partial x_k(x, u^*(x, \lambda)) + \partial f_i / \partial x_k(x, u^*(x, \lambda)) = 0$$

devient

$$d/dt \partial V / \partial x_k + \sum_j \partial V / \partial x_j \partial a_j / \partial x_k(x, u^*(x, \lambda)) + \partial f_i / \partial x_k(x, u^*(x, \lambda)) = 0$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman, étant donné d'une part qu'on a $\sum_j \partial V / \partial x_j \partial a_j / \partial x_k(x, u^*(x, \lambda)) + \partial f_i / \partial x_k(x, u^*(x, \lambda)) = \max_u (\sum_j \partial V / \partial x_j \partial a_j / \partial x_k(x, u) + \partial f_i / \partial x_k(x, u))$ et d'autre part qu'ici on a choisi par convention de maximiser la valeur.

En définissant le hamiltonien $H = \sum_j \partial V / \partial x_j a_j(x, u^*) + f_i(x, u^*)$

l'équation

$$d\lambda_{ik}/dt = d/dt \partial V_i / \partial x_k = - \partial H_i / \partial x_k$$

devient

$$d\lambda_k/dt = d/dt \partial V / \partial x_k = - \partial H / \partial x_k$$

Généralisation des multiplicateurs de Lagrange

Le joueur i veut minimiser $f_i(x, u_1, \dots, u_n)$ avec $h(x, u_1, \dots, u_n) = 0$. Le joueur i peut faire varier x et u_i .

Les composantes de grad f_i dans les directions de x et u_i sont colinéaires aux composantes de grad h selon ces mêmes directions :

- $df_i/dx + \lambda_i \cdot dhi/dx = 0$
- $df_i/du_i + \lambda_i \cdot dhi/du_i = 0$

On définit le lagrangien de façon similaire:

$$Li = f_i + \lambda_i \cdot h$$

et on a alors :

- $dLi/dx = 0$
- $dLi/du_i = 0$
- $dLi/d\lambda_i = 0$

On a également une généralisation du principe de Pontryagin et de l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman avec des formules similaires où on ajoute un indice correspondant au numéro du joueur aux variables f, λ, m, L, H, V , et u lorsqu'on dérive par rapport à u , sinon u désigne le vecteur de fonctions (u_1, \dots, u_n) .

Résolution des jeux différentiels par la méthode hamiltonienne

Un jeu différentiel est un système dont l'état X évolue en fonctions des commandes de n joueurs selon la loi :

$$X(0) = X_0$$

$$dX(t)/dt = a(t, X(t), u_1(t), \dots, u_n(t))$$

avec $u_i(t) \in U$ ensemble des commandes possibles

$$\text{ou } dX(t)/dt = a(t, X(t), U(t)) \text{ avec } U(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$$

Chaque joueur a pour objectif de minimiser (ou maximiser) sa fonction de coût (ou de gain) :

$$\min_{J_s} J_i(y, s, u) = \int^T f_i(t, x(t), U(t)) dt + m_i(x(T))$$

On définit un hamiltonien H_i et un vecteur adjoint λ_i pour chaque joueur :

$$H_i(t, X(t), U(t), \lambda_i(t)) = f_i(t, X(t), u(t)) + \lambda_i(t) \cdot a(t, X(t), U(t))$$

Les conditions d'optimalité sont :

- $dX(t)/dt = \partial H_i(t) / \partial \lambda_i$
- $X(0) = X_0$
- $d\lambda_i(t)/dt = -\partial H_i(t) / \partial X(t)$
- $\lambda_i(T) = m_i'(X(T))$
- $\partial H_i(t) / \partial u_i(t) = 0$

L'équilibre de Nash consiste à déterminer les valeurs initiales ou

finale des vecteurs λ_i de sorte que si on remplace un des λ_i par une autre valeur, le résultat sera moins bon pour le joueur i .

Exemple : jeu de poursuite

Un chauffeur poursuit un piéton en voiture. Son but est de s'approcher le plus possible du piéton. Le but du piéton est de s'éloigner le plus possible de la voiture. La voiture est limitée dans ses possibilités de virage : le coût d'un changement de direction est proportionnel au carré de l'angle. Le piéton change de direction comme il veut. Tous deux ont une vitesse constante.

L'état peut être décrit par les coordonnées (x_1, y_1) de la voiture et sa direction a , et les coordonnées (x_2, y_2) du piéton. On peut le décrire de façon plus compacte par le vecteur voiture \rightarrow piéton de composantes (x, y) avec $x = x_2 - x_1$ et $y = y_2 - y_1$.

Les équations du mouvement sont alors :

- $dx/dt = -v_1 \cos a + v_2 \cos u_2$
- $dy/dt = -v_1 \sin a + v_2 \sin u_2$
- $da/dt = v_1/L u_1$

Le hamiltonien du chauffeur est :

$$H_1 = u_1^2 + x^2 + y^2 + p_{x1} (-v_1 \cos a + v_2 \cos u_2) + p_{y1} (-v_1 \sin a + v_2 \sin u_2) + p_{a1} v_1/L u_1$$

(avec $\lambda_1 = (p_{x1} \ p_{y1} \ p_{a1})'$ et $\lambda_2 = (p_{x2} \ p_{y2} \ p_{a2})'$)

et celui du piéton :

$$H_2 = -x^2 - y^2 + p_{x2} (-v_1 \cos a + v_2 \cos u_2) + p_{y2} (-v_1 \sin a + v_2 \sin u_2) + p_{a2} v_1/L u_1$$

Les conditions d'optimalité sont :

- $d p_{x1}/dt = -\partial H_1 / \partial x = -2x$
- $d p_{y1}/dt = -\partial H_1 / \partial y = -2y$
- $d p_{a1}/dt = -\partial H_1 / \partial a = v_1 (-p_{x1} \sin a + p_{y1} \cos a)$
- $d p_{x2}/dt = -\partial H_2 / \partial x = 2x$
- $d p_{y2}/dt = -\partial H_2 / \partial y = 2y$
- $d p_{a2}/dt = -\partial H_2 / \partial a = v_1 (-p_{x2} \sin a + p_{y2} \cos a)$
- $\partial H_1 / \partial u_1 = 0 = 2 u_1 + p_{a1} v_1/L \Rightarrow u_1 = -1/2 p_{a1} v_1/L$
- $\partial H_1 / \partial u_2 = 0 = v_2 (-p_{x2} \sin u_2 + p_{y2} \cos u_2)$

```

=> px2 sin u2 = py2 cos u2

=> sin u2 / cos u2 = py2 / px2

=> tg u2 = py2 / px2

=> u2 = arctg (py2/px2)

```

Programme SCILAB

Taper par exemple : [px1,py1,pa1,px2,py2,pa2]=solve(1,0.01,10)

```

function [r]=plotpoint(x,y)
  xrect(x,y,0,0)
  //plot([x,x],[y,y]);
  r=0;
endfunction

// function [r]=traj ( )
// function [s11,s12]=traj(fp,T,px1,py1,pa1,px2,py2,pa2)

function [s11,s12]=traj(fp,T,p1,p2)
px1=p1(1)
py1=p1(2)
pa1=p1(3)

px2=p2(1)
py2=p2(2)
pa2=p2(3)

pi = 3.1415926

dt=0.04
// T=5

v1=5
v2=3
L=2

xmin=-10
xmax=10
ymin=10
ymax=-10

// function [r]=traj()

s11=0
s12=0
x1=0
y1=0
x2=-3
y2=1
x=x2-x1
y=y2-y1
a=0
// px1=0
// py1=0
// pa1=0
// px2= 1
// py2=1
// pa2=1

// clf
if (fp > 0)
  xclear()
  plot([xmin,xmax,xmax,xmin],[ymin,ymin,ymax,ymax])
end

// axis([xmin,xmax,ymin,ymax])
// hold on

for t=0:dt:T

```

```

u1=-0.5*pa1*v1/L;
// u2=atan(py2/px2) ;
u2 = imag(log(px2+sqrt(-1)*py2));

x1=x1 +dt*v1*cos(a);
y1=y1 +dt*v1*sin(a);

x2=x2 +dt*v2*cos(u2);
y2=y2+dt*v2*sin(u2);

x=x2-x1;
y=y2-y1;

if fp
plotpoint(x1,y1);
plotpoint(x2,y2);
plotpoint(xmin+(xmax-xmin)*t/T,s11/8);
plotpoint(xmin+(xmax-xmin)*(1-t/T),s12/8);
end

a=a+dt *v1/L*u1;

px1 =px1+dt* (-2*x);
py1=py1+dt*(-2*y);
pa1=pa1+dt*(v1*(-px1*sin(a)+py1*cos(a)));

px2 =px2+dt*(2*x);
py2=py2+dt*(2*y);
pa2=pa2+dt*(v1*(-px2*sin(a)+py2*cos(a)));

s11=s11 +dt *(u1^2+x^2 +y^2);
s12=s12+dt*(-x^2-y^2);

end
r=0
endfunction

// traj()

function r=test()
fp=1
T=5
px1=0
py1=0
pa1=0
px2= 1
py2=1
pa2=1
p1=[px1,py1,pa1]
p2=[px2,py2,pa2]
traj(fp,T,p1,p2 )
r=0
endfunction

function [s11,s12,p1,p2]=solve(T,eps,m)

px1=0
py1=0
pa1=0
px2=1.01
py2=1.01
pa2=1

p1=[px1,py1,pa1]
p2=[px2,py2,pa2]

dp=0.5

s=0

while 1

s=s+1
if s>m
break
end

```

```

// plotpoint(px1/10,px2/10)
// plotpoint(py1/10,py2/10)
// plotpoint(pa1/10,pa2/10)

[s11,s12] = traj(1,T,p1,p2)
printf("s11=%f s12=%f\n",s11,s12)
disp(p1,p2)

s11p = s11
s12p = s12

af=0

for i=1:3
p1(i)=p1(i)+dp
// clf
if (af>0)
xclear()
end
[s11t,s12t] = traj(af,T,p1,p2)
if s11t < s11
printf("amelioration pour 1\n")
s11=s11t
s12=s12t
if (af==0)
traj(1,T,p1,p2)
printf("s11=%f s12=%f\n",s11,s12)
disp(p1,p2)
end
else
p1(i)=p1(i)-2*dp
// clf
if (af>0)
xclear()
end
[s11t,s12t] = traj(af,T,p1,p2)
if s11t < s11
printf("amelioration pour 1\n")
s11=s11t
s12=s12t
if (af==0)
traj(1,T,p1,p2)
printf("s11=%f s12=%f\n",s11,s12)
disp(p1,p2)
end
else
p1(i) =p1(i)+dp
end
end

p2(i)=p2(i)+dp
// clf
if (af>0)
xclear()
end
[s11t,s12t] = traj(af,T,p1,p2)
if s12t < s12
printf("amelioration pour 2\n")
s11=s11t
s12=s12t
if (af==0)
traj(1,T,p1,p2)
printf("s11=%f s12=%f\n",s11,s12)
disp(p1,p2)
end
else
p2(i)=p2(i)-2*dp
// clf
if (af>0)
xclear()
end
[s11t,s12t] = traj(af,T,p1,p2)
if s12t < s12
printf("amelioration pour 2\n")
s11=s11t
s12=s12t
if (af==0)

```

```

    traj(1,T,p1,p2)
    printf("s11=%f s12=%f\n",s11,s12)
    disp(p1,p2)
end
else
    p2(i)=p2(i)+dp
end
end
end

end

if ((s11==s11p) & (s12==s12p))
    dp=dp/2
// else
// dp=dp*2
end

if dp<eps
    break
end

end

px1=p1(1)
py1=p1(2)
pa1=p1(3)

px2=p2(1)
py2=p2(2)
pa2=p2(3)

traj(1,T,p1,p2)

r=0
endfunction

```

Equation de Hamilton - Jacobi - Bellman - Isaacs

Cette équation est une généralisation de l'équation de Hamilton - Jacobi - Bellman qui s'applique aux jeux différentiels à somme nulle avec 2 joueurs. L'équation est :

$$\min_{u \in U} \max_{v \in V}, (f(t, x, u, v) + \partial V(x, t) / \partial t + \partial V(x, t) / \partial x \cdot a(t, x, u, v)) = 0$$

$$\text{ou } \min_{u \in U} \max_{v \in V}, H = 0$$

$$\text{avec } H = f(t, x, u, v) + \partial V(x, t) / \partial t + \partial V(x, t) / \partial x \cdot a(t, x, u, v)$$

La différentiation donne l'équation :

$$dp_i / dt = - \partial H / \partial x_i$$

$$\text{avec } p_i = \partial V(x, t) / \partial x$$

ou en notation matricielle :

$$dp/dt = - (\partial f / \partial x)' p$$

Exemple : le jeu du chauffeur homicide

Un chauffeur conduisant un véhicule circulaire de rayon b , de vitesse constante $v_1 = 1$ avec un rayon de braquage limité, veut écraser un piéton qui vourt à la vitesse v_2 .

La commande du chauffeur est la déviation de sa trajectoire u_1 avec la contrainte $abs(u_1) \leq 1$. Celle du piéton est sa direction u_2 .

Dans le repère orthonormé centré sur le centre du véhicule avec l'axe x_2 dirigé vers le piéton, les équations sont :

- $dx_1/dt = -u_1 x_2 + v_2 \sin u_2$
- $dx_2/dt = -1 + u_1 x_1 + v_2 \cos u_2$

Le chauffeur gagne si $x_1^2 + x_2^2 \leq b^2$

Le hamiltonien est :

$$H = p_1 (-u_1 x_2 + v_2 \sin u_2) + p_2 (-1 + u_1 x_1 + v_2 \cos u_2)$$

L'équation d'Isaacs $\min u_1 \max u_2 H = 0$ donne les valeurs optimales suivantes des commandes :

$$u_1 = \text{signe}(p_1 x_2 - p_2 x_1)$$

$$\sin u_2 = p_1 / (p_1^2 + p_2^2), \cos u_2 = p_2 / (p_1^2 + p_2^2)$$

et l'évolution des variables adjointes :

- avec le hamiltonien :
 - $dp_1/dt = - \partial H / \partial x_1 = - p_2 u_1$
 - $dp_2/dt = - \partial H / \partial x_2 = p_1 u_1$
- avec le calcul matriciel :

$$\partial f / \partial x =$$

$$(\partial f_1 / \partial x_1 \quad \partial f_1 / \partial x_2)$$

$$(\partial f_2 / \partial x_1 \quad \partial f_2 / \partial x_2)$$

=

$$(0 \quad -u_1)$$

$$(u_1 \quad 0)$$

$$dp/dt = - (\partial f / \partial x)' \cdot p =$$

$$(-p_2 u_1)$$

$$(p_1 u_1)$$

Références

- Fritz Reinhardt et Heinrich Soeder, Atlas des mathématiques, Le Livre de Poche
- L. Pontryaguine, V. Boltianski, R. Gamkrélidzé, E. Michtchenko, Théorie mathématique des processus optimaux, Editions de Moscou
- Jacques Gauvin, Leçons de programmation mathématiques, Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal
- Stéphane Mottelet, Optimisation non-linéaire, Université de Technologie de Compiègne - <http://www.iro.umontreal.ca/~marcotte/Ift3512/Compiègne.pdf>
- Jacques Thépot, Optimisation pour l'économie d'entreprise, Dalloz
- Numerical Solution of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations by an Exponentially Fitted Finite Volume Method - <http://www.cert.fr/colloques/bail2004/fichiers/Authors/Richardson-Wang.pdf>
- Steven M. LaValle, Planning Algorithms, University of Illinois - <http://msl.cs.uiuc.edu/planning/>
- Jean-Christophe Culioli, Introduction à l'optimisation
- Emmanuel Trélat, Contrôle optimal, théorie et applications, Université Paris-Sud - <http://www.math.u-psud.fr/~trelat/publications.html>
- Maïtine Bergounioux, Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Dunod
- Rufus Isaacs, Differential Games, Dover
- S. S. Sastry, Lectures in Optimal Control and Dynamical Games - <http://www.vuse.vanderbilt.edu/~kootj/Class/2001/Spring/optimal.ps>
- Game Theory 1999 - <http://www.control.lth.se/education/game99/>
- Ekkehard Ernst, Mémoire majeur DEA économie des institutions : Jeux différentiels et analyse dynamique des institutions - http://pythie.cepremap.cnrs.fr/~ernst/pdfdoc/majeur_97.pdf
- Katheline Schubert, Macroéconomie Comportements et croissance, Vuibert
- David Romer, Macroéconomie approfondir, McGraw-Hill/Ediscience
- E. Malinvaud, Théorie macroéconomique, Dunod
- Analyse macroéconomiques, Repères La Découverte
- Jean-Luc Gaffard, Croissance et fluctuations économiques, Montchrestien
- Les théories de la croissance endogène - <http://marquet.u-bordeaux4.fr/documents1/7Crendogene.pdf>