LES ORDINAUX TRANSFINIS par Jacques Bailhache, Janvier-mars 2018

Tout ordinal peut être défini comme le plus petit ordinal strictement supérieur à tous les ordinaux d'un ensemble : l'ensemble vide pour 0, $\{\alpha\}$ pour le successeur de α, $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...\}$ pour un ordinal qui a pour suite fondamentale $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ...$

1 Notation algébrique

On définit les opérations arithmétiques sur les ordinaux :

- addition : $\alpha + 0 = \alpha; \alpha + suc(\beta) = suc(\alpha + \beta); \alpha + lim(f) = lim(n \mapsto \alpha + f(n))$
- multiplication : $\alpha \times 0 = 0; \alpha \times suc(\beta) = (\alpha \times \beta) + \alpha; \alpha \times lim(f) = lim(n \mapsto \alpha \times f(n))$
- exponentiation : $\alpha^0 = 1; \alpha^{suc(\beta)} = \alpha^\beta \times \alpha; \alpha^{lim(f)} = lim(n \mapsto \alpha^{f(n)})$

2 Fonctions de Veblen

$\varepsilon_0 = lim\ \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots; \varepsilon_1 = lim\ \varepsilon_0, {\varepsilon_0}^{\varepsilon_0}, {\varepsilon_0}^{{\varepsilon_0}^{\varepsilon_0}}, \ldots = lim\ \varepsilon_0 + 1, \omega^{\varepsilon_0+1}, \omega^{\omega^{\varepsilon_0+1}}, \ldots; \zeta_0 = lim\ 0, \varepsilon_0, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \ldots$

$\omega^\alpha = \varphi_0(\alpha) = \varphi(0, \alpha); \varepsilon_\alpha = \varphi_1(\alpha) = \varphi(1, \alpha); \zeta_\alpha = \varphi_2(\alpha) = \varphi(2, \alpha)$

$\varphi(\ldots, \beta, 0, \ldots, 0, \gamma)$ est le $(1+\gamma)^{eme}$ point fixe commun aux fonctions $\xi \mapsto \varphi(\ldots, \delta, \xi, 0, \ldots, 0)$ pour tous les $\delta < \beta$.

$\varphi(\alpha_n, \ldots, \alpha_0, \beta)$ peut aussi s'écrire $\varphi_{\alpha_n,\ldots,\alpha_0}(\beta)$ ou $\varphi_{\Omega^n \times \alpha_n + \ldots + \alpha_0}(\beta)$ ou $\varphi(\Omega^n \times \alpha_n + \ldots + \alpha_0, \beta)$ ou $\begin{pmatrix} \beta & \alpha_0 & \ldots & \alpha_n \\ 0 & 1 & \ldots & n+1 \end{pmatrix}$

3 Notation de Simmons

$Fixfz = f^w(z+1)$ = plus petit point fixe de f strictement supérieur à z ; $Next = Fix(\alpha \mapsto \omega^\alpha)$

$[0]h = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha \omega)$; $[1]hg = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha g\omega)$; $[2]hgf = Fix(\alpha \mapsto h^\alpha gf\omega)$; etc...

Correspondance avec φ de Veblen : $\varphi(1+\beta, \alpha) = ([0]^\beta Next)^{1+\alpha}\omega$

Si $\gamma > 0, \varphi(\gamma, \beta, \alpha) = \varphi(\gamma \times \Omega + \beta, \alpha) = ([0]^{\gamma\times\Omega+\beta} Next)^{1+\alpha}\omega = ([0]^\beta(([0]^\Omega)^\gamma Next))^{1+\alpha}\omega = ([0]^\beta(([1][0])^\gamma Next))^{1+\alpha}\omega$

Si $\delta > 0$ or $\gamma > 0, \varphi(\delta, \gamma, \beta, \alpha) = \varphi(\delta \times \Omega^2 + \gamma \times \Omega + \beta, \alpha) = ([0]^{\Omega^2\times\delta+\Omega\times\gamma+\beta} Next)^{1+\alpha}\omega = ([0]^\beta([0]^\Omega)^\gamma([0]^{\Omega^2})^\delta Next)))^{1+\alpha}\omega = ([0]^\beta(([1][0])^\gamma(([1]^2[0])^\delta Next)))^{1+\alpha}\omega$, avec $[0]^{\Omega^n} = [1]^n[0]$.

Rationalisation de φ : $\varphi(1+\beta, \alpha) = \varphi'(\beta, 1+\alpha) => \varphi'(\beta, \alpha) = ([0]^\beta Next)^\alpha\omega; \varphi(\gamma, \beta, \alpha) = \varphi'(\gamma, \beta, 1+\alpha)$

4 Notation RHS0

On part de 0, si on ne voit aucune régularité on prend le successeur, si on voit une régularité, si on a une notation pour cette régularité on l'utilise sinon on l'invente, puis on saute à la limite.

$Hfx = lim\ x, fx, f(fx), \ldots; R_1fgx = lim\ gx, fgx, ffgx, \ldots; R_2fghx = lim\ hx, fghx, fgfghx, \ldots$

Correspondance avec la notation de Simmons : $\ldots, [3] \to R_5, [2] \to R_4, [1] \to R_3, [0] \to R_2, Next \to R_1, \omega \to Hsuc\ 0$

5 Ordinaux-arbres (tree ordinals)

Un ordinal-arbre a appartient à la classe d'ordinaux-arbres $\Omega_n(n \in \mathbb{N}$ si on a a = 0, a = a' + 1 pour un ordinal-arbre a' appartenant à la classe d'ordinaux-arbres Ω_n, ou a est une fonction de Ω_k vers Ω_n pour un certain k ¡ n.

A tout ordinal-arbre a, on peut associer un ordinal correspondant $\alpha = |a|$ obtenu en ignorant le choix d'une suite fondamentale particulière, et défini par : $|0| = 0$; $|a+1| = |a| + 1$; $|a| = sup|a[b]|$ si a est une fonction de Ω_k vers Ω_n.

On peut définir l'extension suivante de la hiérarchie de croissance rapide (qui correspond au cas n=0) :

- $F_n(0, b) = b + 1$
- $F_n(a+1, b) = [F_n(a, \bullet)]^b(b)$
- $(F_n(a, b))[c] = F_n(a[c], b)$ si a est une fonction de Ω_k vers Ω_{n+1} avec $k < n$
- $(F_n(a, b)) = F_n(a[b], b)$ si a est une fonction de Ω_n vers Ω_{n+1}

6 Fonctions d'écrasement (Ordinal collapsing functions)

Ces fonctions utilisent des ordinaux non dénombrables pour définir des ordinaux dénombrables.

On définit des ensembles d'ordinaux qui peuvent être construits à partir de certains ordinaux et de certaines opérations, puis on définit le plus petit ordinal qui n'appartient pas à cet ensemble, ou le plus petit ordinal qui est plus grand que tous les ordinaux dénombrables de cet ensemble.

Ces fonctions sont des extensions de fonctions sur des ordinaux dénombrables, dont on peut atteindre le point fixe en les appliquant à un ordinal non dénombrable, puis le dépasser en les appliquant à des ordinaux non dénombrables plus grands, par exemple :

- ψ_0 de Buchholz : $\psi_0(\alpha) = \omega^\alpha$ if $\alpha < \varepsilon_0; \psi_0(\Omega) = \varepsilon_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$.
- ψ de Madore : $\psi(\alpha) = \varepsilon_\alpha$ si $\alpha < \zeta_0; \psi(\Omega) = \zeta_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$.
- θ de Feferman : $\theta(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ si $\alpha < \Gamma_0$ et $\beta < \Gamma_0; \theta(\Omega, 0) = \Gamma_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \varphi(\alpha, 0)$.
- C de Taranovsky : $C(\alpha, \beta) = \beta + \omega^\alpha$ si α est dénombrable; $C(\Omega_1, 0) = \varepsilon_0$ qui est le plus petit point fixe de $\alpha \mapsto \omega^\alpha$.

Exemples de formules générales définissant des fonctions d'écrasement :

- $\psi_\nu(0) = z(\nu)$ (for example : $\psi_\nu(0) = \Omega_\nu$, or $\psi_0(0) = 1; \psi_{1+\nu}(0) = \Omega_{1+\nu} = \omega_{1+\nu}$
- $\psi_\nu(suc\ \alpha) = f(\psi_\nu(\alpha))$
- $\psi_\nu(lim\ h) = lim(\psi_\nu \circ h)$ (with $lim = Lim_0$)
- $\psi_\nu(Lim_{\kappa+1}h) = Lim_{\kappa+1}(\psi_\nu \circ h)$ if $\kappa < \nu$, or with fundamental sequence notation : $\psi_\nu(\alpha)[\eta] = \psi_\nu(\alpha[\eta])$
- $\psi_\nu(Lim_{\kappa+1}h) = lim[\psi_\nu(h((\psi_\kappa \circ h)^\bullet(\zeta)))]$ if $\kappa \geq \nu$, with $\zeta = 0$ or 1 or $\psi_\kappa(0)$ for example.

Nom	Symbole	Algébrique	Veblen	Simmons	RHS0	Madore	Taranovsky
Zero	0	0			0		0
Un	1	1	$\varphi(0,0)$		suc 0		C(0,0)
Deux	2	2			suc (suc 0)		C(0,C(0,0))
Omega	ω	ω	$\varphi(0,1)$	ω	H suc 0		C(1,0)
		$\omega+1$			suc (H suc 0)		C(0,C(1,0))
		$\omega\times 2$			H suc (H suc 0)		C(1,C(1,0))
		ω^2	$\varphi(0,2)$		H (H suc) 0		C(C(0,C(0,0)),0)
		ω^ω	$\varphi(0,\omega)$		H H suc 0		C(C(1,0),0)
Epsilon zero	ε_0	ε_0	$\varphi(1,0)$	$Next\ \omega$	$R_1 Hsuc\ 0$	$\psi(0)$	$C(\Omega_1,0)$
		ε_1	$\varphi(1,1)$	$Next^2\omega$	$R_1(R_1H)suc\ 0$	$\psi(1)$	$C(\Omega_1,C(\Omega_1,0)$
		ε_ω	$\varphi(1,\omega)$	$Next^\omega\omega$	$HR_1Hsuc\ 0$	$\psi(\omega)$	$C(C(0,\Omega_1),0)$
		$\varepsilon_{\varepsilon_0}$	$\varphi(1,\varphi(1,0))$	$Next^{Next\omega}\omega$	$R_1HR_1Hsuc\ 0$	$\psi(\psi(0))$	$C(C(C(\Omega_1,0),\Omega_1),0)$
Zeta zero	ζ_0	ζ_0	$\varphi(2,0)$	$[0]Next\ \omega$	$R_2R_1Hsuc\ 0$	$\psi(\Omega)$	$C(C(\Omega_1,\Omega_1),0)$
Eta zero	η_0	η_0	$\varphi(3,0)$	$[0]^2Next\ \omega$	$R_2(R_2R_1)Hsuc\ 0$		$C(C(\Omega,C(\Omega,\Omega)),0)$
			$\varphi(\omega,0)$	$[0]^\omega Next\ \omega$	$HR_2R_1Hsuc\ 0$		$C(C(C(0,\Omega_1),\Omega_1),0)$
Feferman -Schütte	Γ_0	Γ_0	$\varphi(1,0,0)$ $=\varphi(2\mapsto 1)$	$[1][0]Next\ \omega$	$R_3R_2R_1Hsuc\ 0$ $=R_{3\ldots 1}Hsuc\ 0$	$\psi(\Omega^\Omega)$	$C(C(C(\Omega_1,\Omega_1),$ $\Omega_1),0)$
Ackermann			$\varphi(1,0,0,0)$ $=\varphi(3\mapsto 1)$	$[1]^2[0]Next\ \omega$	$R_3(R_3R_2)R_1Hsuc\ 0$	$\psi(\Omega^{\Omega^2})$	
Petit Veblen			$\varphi(\omega\mapsto 1)$	$[1]^\omega[0]Next\ \omega$	$HR_3R_2R_1Hsuc\ 0$	$\psi(\Omega^{\Omega^\omega})$	$C(\Omega_1^\omega,0)$ $=C(C(C(C(0,\Omega_1),$ $\Omega_1),\Omega_1),0)$
Grand Veblen			+ petit ord. non rep.	$[2][1][0]Next\ \omega$	$R_4R_3R_2R_1Hsuc\ 0$ $=R_{4\ldots 1}Hsuc\ 0$	$\psi(\Omega^{\Omega^\Omega})$	$C(\Omega_1^{\Omega_1},0)$ $=C(C(C(C(\Omega_1,\Omega_1),$ $\Omega_1),\Omega_1),0)$
Bachmann-Howard				+ petit ord. non rep.	$R_{\omega\ldots 1}Hsuc\ 0$	$\psi(\varepsilon_{\Omega+1})$	$C(C(\Omega_2,\Omega_1),0)$